

Fazodagi tekislik va to'g'ri chiziq

Ma'lumki, nuqta, to'g'ri chiziq va tekislik fazo geometriyasining (stereometriyaning) boshlang'ich tushunchalaridan iboratdir. Agar fazoda Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo'lsa, undagi har bir M nuqta o'zining koordinatalari deb ataluvchi tartiblangan uchta x, y, z sonlar bilan aniqlanishi va $M(x;y;z)$ kabi yozilishi ham bizga ma'lumdir. To'g'ri chiziq va tekislikka kelsak, ularni tenglamalar vositasida ifodalash qulaydir.

Koordinatalar fazosining uch o'zgaruvchili

$$F(x; y; z) = 0$$

berilgan tenglamani koordinatalari qanoatlantiruvchi $M(x;y;z)$ nuqtalarining to'plami *sirt*, berilgan tenglama esa *uning tenglamasi* deb yuritiladi.

6.1. Tekislikning tenglamalari

Fazoda tekislikni turli tenglamalar vositasida aniqlash mumkin.

6.1.1. Tekislikning vektor tenglamasi

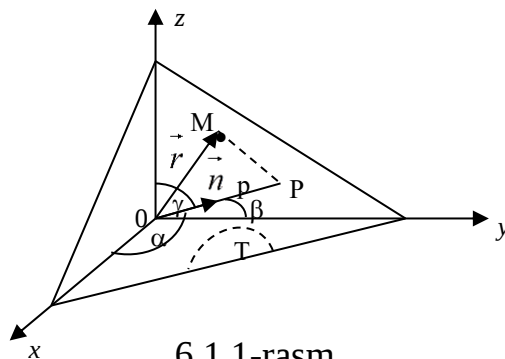
Faraz qilaylik, Dekart koordinatalar sistemasining boshidan berilgan T tekislikkacha bo'lgan masofa p ga teng bo'lib ($p \geq 0$), koordinatalar boshidan T tekislikka tushirilgan ($p=0$ bo'lganda o'tkazilgan) perpendikulyarning birlik vektori (normali) $\vec{n}$ bo'lsin. U vaqtda, T tekislikning ixtiyoriy M nuqtasining $\vec{r}$ radius vektori uchun (6.1.1-rasm)

$$\pi p \vec{n} \cdot \vec{r} = p \Leftrightarrow \pi p \vec{n} \cdot \vec{r} - p = 0$$

bo'lishi ravshandir. Endi, skalyar ko'paytmaning proyeksiya orqali ifodalanuvchi xossasini esga keltirsak, yuqoridagini

$$\vec{r} \cdot \vec{n} - p = 0 \quad (6.1.1)$$

ko'rinishda yozish mumkin. (6.1.1) ni *tekislikning vektor tenglamasi* deb yuritiladi.



6.1.2. Tekislikning normal tenglamasi

Endi, yuqorida olingan tekislikning vektor tenglamasida tekislikning ixtiyoriy $M(x; y; z)$ nuqtasining radius-vektori $\vec{r}(x; y; z)$ va birlik vektor koordinatalari uning yo'naltiruvchi kosinuslari, ya'ni $\vec{n}(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ ekanligini etiborga olsak,

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \quad (6.1.2)$$

ni olamiz. (6.1.2) *tekislikning normal tenglamasi* deb yuritiladi va unda $p \geq 0$ va $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ bo'lishini yodda tutmoq lozimdir.

6.1.3. Tekislikning umumiy tenglamasi

Tekislikning normal tenglamasi bo'lgan (6.1.2) dan ko'rinadiki, u uch o'zgaruvchili chiziqlidir. Shu sababli, uch o'zgaruvchili

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (6.1.3)$$

chiziqli (umumiy) tenglama fazoda biror tekislikni aniqlashi haqidagi savolning qo'yilishi tabiiy bo'lib, agar

$$A^2 + B^2 + C^2 > 0 \quad (6.1.4)$$

shart bajarilsa, unga javob ijobiydir.

Haqiqatdan ham, $\vec{N}(A; B; C)$ vektorni kiritsak, (6.1.4) shartga ko'ra $|\vec{N}| > 0$ ekanligi ravshandir. Endi, (6.1.3) tenglamaning har ikki tomonini *normallovchi ko'paytuvchi* deb ataluvchi

$$\mu = \pm \frac{1}{|\vec{N}|} = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

songa ko'paytiramiz va unda $D \geq 0$ bo'lsa «-» ishorani, $D < 0$ bo'lganda esa «+» ishorani tanlaymiz. U vaqtda,

$$(\mu A)x + (\mu B)y + (\mu C)z - (\mu D) = 0 \text{ yoki } \frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad (6.1.5)$$

tenglamani olamiz va bu yerda

$(\mu A)^2 + (\mu B)^2 + (\mu C)^2 = 1$, $P = -\mu D \geq 0$ bo'lishi, μ ning yuqoridagicha aniqlanishidan yaqqol ko'rinib turibdi.

Demak, (6.1.3) tenglama (6.1.5) ko'rinishdagi tekislikning normal tenglamasiga keltirildi, ya'ni (6.1.4) shart bajarilganda (6.1.3) tenglama fazoda biror tekislikni ifodalashi isbotlandi. Shu sababli, (6.1.3) ni *tekislikning umumiy tenglamasi* deb yuritiladi.

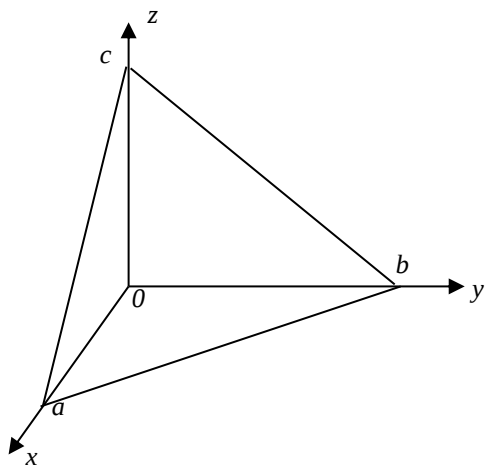
$\vec{n}(\mu A; \mu B; \mu C)$ birlik vektor bo'lib, u (6.1.3) tekislikka perpendikulyar hamda $\vec{n} \parallel \vec{N}$ ekanligidan $\vec{N}(A; B; C)$ ham tekislikka perpendikulyar bo'ladi va uni *tekislikning normali* deb yuritiladi.

6.1.4. Tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi

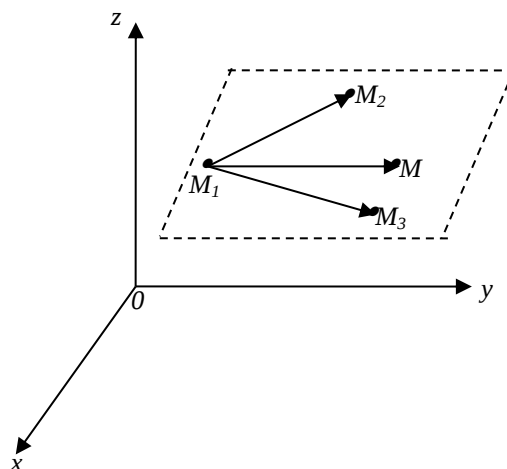
Endi, (6.1.3) tenglamada $ABCD \neq 0$ deb faraz qilaylik. U holda, tenglamani

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (6.1.6)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. (6.1.6) tenglamadagi a, b, c lar tekislikning Ox, Oy, Oz o‘qlaridan ajratgan mos kesmalarning miqdorlari ekanligini payqash qiyin emas (6.1.2-rasm). Shu sababli, (6.1.6) ni *tekislikning kesmalar bo‘yicha tenglamasi* deb yuritiladi.



6.1.2-rasm.



6.1.3- rasm.

6.1.5. Berilgan uchta nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi

Agar bitta to‘g‘ri chiziqda yotmovchi $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ va $M_3(x_3; y_3; z_3)$ nuqtalar berilgan bo‘lsa, ular orqali yagona tekislik o‘tishi ma’lumdir. Faraz qilaylik, $M(x; y; z)$ shu tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. U vaqtda, $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ vektorlar komplanar (6.1.3-rasm) va

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$$

bo‘lishi ravshandir.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$

ekanligini va aralash ko‘paytmaning koordinatalar shaklini e‘tiborga olsak,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.1.7)$$

ni olamiz. (6.1.7) berilgan *uchta nuqta orqali o‘tuvchi tekislik tenglamasidir*. Uni to‘rtinchi tartibli determinant orqali quyidagicha yozsa bo‘ladi:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

6.1.6. Tekisliklar bog‘lami

Berilgan bitta $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi barcha tekisliklar to‘plami *tekisliklar bog‘lami*, M_0 nuqta uning *markazi* deb ataladi.

Agar bog‘lamga tegishli tekislik

$$Ax+By+Cz+D=0$$

deb qarab, u M_0 nuqta orqali o‘tishini hisobga olsak,

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \quad D=-Ax_0-By_0-Sz_0$$

ekanligidan

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \quad (6.1.8)$$

ga kelamiz. (6.1.8) tekisliklar bog‘lamining tenglamasidir va unda A, B, C lar ixtiyoriy qiymatlar qabul qilib, ular (6.1.4) shartni qanoatlantirishi kerak.

6.1.7. Tekisliklar dastasi

Berilgan to‘g‘ri chiziq orqali o‘tuvchi barcha tekisliklar to‘plami *tekisliklar dastasi* deyilib, berilgan to‘g‘ri chiziq uning o‘qi deyiladi.

Agar dastaga tegishli bo‘lgan ikkita

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

tekisliklar ma‘lum bo‘lsa, dastaning umumiy tenglamasini

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin bo‘lib, bu yerda λ va μ lar ixtiyoriy $\lambda^2+\mu^2>0$ shartni qanoatlantiruvchi sonlardir. Buni isbotlaylik. $M_0(x_0;u_0;z_0)$ dasta o‘qining ixtiyoriy nuqtasi desak, ikala tekislik ham o‘q orqali o‘tganligi sababli

$$\lambda(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)+\mu(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)=0 \Rightarrow \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0=0$$

to‘g‘ri tenglikni olamiz.

Eslatma. Dasta tenglamasini bir parametrlili ko‘rinishda ham yozsa bo‘ladi, masalan,

$\lambda \neq 0$ deb faraz qilinsa,

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=q(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)$$

ni olish mumkin, bu yerda $q=-\frac{\mu}{\lambda}$. Ammo, bu tenglamadan ikkinchi tekislik tenglamasini olib bo‘lmaydi, ya‘ni bu to‘plamga ikkinchi tekislik kirmaydi.

$\mu \neq 0$ deb qilingan faraz ham shunga o‘xshashdir.

6.2. Nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa

Aytaylik, $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtadan

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

normal tenglamasi bilan berilgan T tekislikgacha bo‘lgan masofani topish talab qilingan bo‘lsin. Ma‘lumki p koordinatalar boshidan tekislikgacha bo‘lgan masofa, $\vec{n}$ esa uning birlik vektoridir. 6.2.1-rasmda

$$M_1 \in T, \quad \overrightarrow{M_1M_0} = \vec{d}, \quad \vec{d} \parallel \vec{n}, \quad \vec{d} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1, \quad r_0(x_0;y_0;z_0);$$

$$M_1(x_1;y_1;z_1) \text{ desak, } \vec{r}_1(x_1;y_1;z_1) \text{ bo‘lib, } \vec{r}_1 \cdot \vec{n} = x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma=p \text{ bo‘lishi aniq.}$$

$\vec{d} \parallel \vec{n}$ va $|\vec{n}|=1$ ekanligidan

$$\delta = |\vec{d}| = |\vec{d} \cdot \vec{n}| = |(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \cdot \vec{n}| = |\vec{r}_0 \cdot \vec{n} - \vec{r}_1 \cdot \vec{n}| = |x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p|,$$

ya‘ni, berilgan nuqtadan berilgan tekislikkacha bo‘lgan masofa uchun

$$\delta = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p| \quad (6.2.1)$$

formulani olamiz.

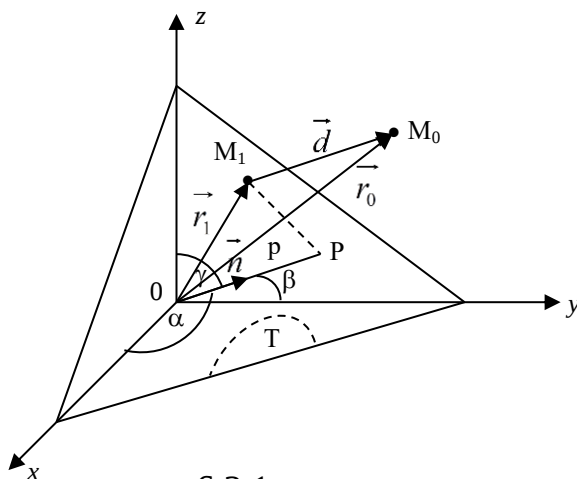
Agar tekislik

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsa, normallovchi ko'paytuvchi yordamida uni normal ko'rinishga keltirilishini yodga keltirsak, $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan bu tekislikkacha bo'lgan masofa uchun

$$\delta = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (6.2.2)$$

formulani olish qiyin emas.



6.2.1- rasm.

6.3. Ikki tekislik orasidagi burchakni topish

Ikki tekislik orasidagi burchak sifatida ularning normallari orasidagi burchakni qabul qilamiz. U vaqtda, agar T_1 va T_2 tekisliklar o'zlarining

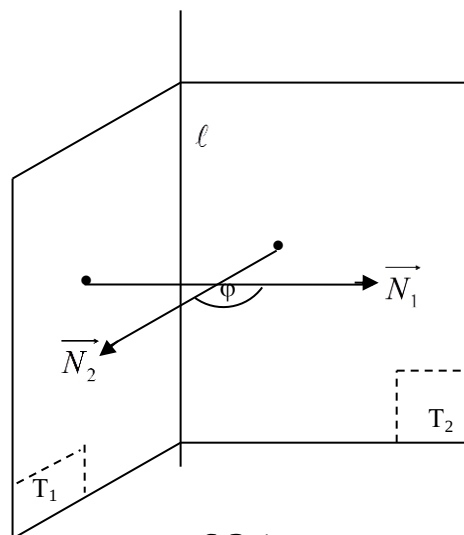
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

umumiy tenglamalari bilan berilgan bo'lsa, ularning normallari $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1)$ va $\vec{n}_2(A_2; B_2; C_2)$ bo'lib, tekisliklar orasidagi burchak φ uchun (6.3.1-rasm)

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

formulani olamiz.



6.3.1-rasm.

Agar tekisliklar parallel bo'lsa, $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$ dan

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

ni olamiz. Bu tekisliklarning parallellik shartidir.

Eslatma. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ bo'lgan holda tekisliklarning ustma-ust tushishini ko'rish qiyin emasdir.

Agar tekisliklar perpendikulyar bo'lsa, $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$ ekanligidan $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0$, ya'ni

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

kelib chiqadi. Bu tekisliklarning perpendikulyarlik shartidir.